セゲー核の対数項とRamadanov予想 (ポテンシャル論とベルグマン核)

平地, 健吾

数理解析研究所講究録
第 1694 巻 2010 年 144-150

セゲー核の対数項と Ramadanov 予想

東京大学大学院数理科学研究科　平地健吾　(HIRACHI Kengo)

1　はじめに

Ramadanov 予想というのは「ベルグマン核の境界での漸近展開が対数項をもたないのは球の場合に限る」というものである．２次元領域の場合には予想が正しいことが 20 年以上前に示されている [G]．多くの人がこの予想は正しいと信じていたのであるが，昨年 Englis–Zhang[EZ] によって弱い意味での反例が構成されてしまった．ここで弱い意味というのはこの反例はスタインでない領域であり，スタインという仮定のもとでは未だに未解決である．このノートでは Englis–Zhang の反例は Riemann–Roch の定理から簡単に導けることを示す．また，なぜ２次元でのみ予想が解決されているのかを説明する．

Ramadanov 予想が解決されたとしても重要な帰結がある訳ではなかった（ベルグマン核の漸近解析を研究するときのほどよい目標であった）が，予想が間違っていたため,「ベルグマン核の対数項が消えるのはどのようなときか」という問題はより豊かな幾何的な構造を持つ可能性がでてきた．うれしい誤算である．

2　Ramadanov 予想

核関数の定義と性質を復習して Ramadanov 予想のいくつかのバージョンを述べる．$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を滑らかな境界をもつ有界強擬凸領域とする．Ω 上の L^2 正則関数のなすヒルベルト空間 $A^2(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ を考える．$A^2(\Omega)$ の正規直交基底 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対して

$$B_\Omega(z) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(z)|^2$$

は Ω 上で広義一様収束し実解析的関数を定義する．これを Ω のベルグマン核という（B_Ω は正規直交基底の選び方によらない）．この定義では Ω 上のルベーグ測度を使った L^2 空間を定義したが，$(n,0)$-形式に対して

$$(-i)^n \int_\Omega f \wedge \overline{f}$$

により内積を定義すれば複素多様体上のベルグマン核を (n,n)-形式として自然に定義することができる．一方セゲー核は境界 $\partial\Omega$ 上の面素 $d\sigma$ を固定することによって定義されるハーディ空間 $A^2(\partial\Omega, d\sigma) = L^2(\partial\Omega, d\sigma) \cap \mathcal{O}(\Omega)$ (L^2 境界値をもつ正則関数のなす空間) の正規直交基底 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ を用いて

$$S_\Omega(z) = \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(z)|^2$$

で与えられる Ω 上の実解析関数である．Ω を複素多様体の中の領域としてもセゲー核は同様に定義できるが，$d\sigma$ の選び方には任意性がありベルグマン核のように自然に定まるものではない．

いずれの核関数も具体的に計算するのは困難であり，私の知る限り，閉じた形で表示可能な強擬凸領域は球（と双正則同値な領域）の場合のみである．単位球 $\Omega = \{|z|^2 < 1\}$ においては

$$B_\Omega(z) = c_n(1-|z|^2)^{-n-1}, \quad S_\Omega(z) = c_n'(1-|z|^2)^{-n},$$

である．ここで $d\sigma$ は球面上の通常の面素を考える．c_n^{-1} は球の体積，$c_n'^{-1}$ は球面の面積である．

一般の強擬凸領域では次のような Fefferman の漸近展開が知られている．ρ を Ω の C^∞ 定義関数で内部では正になるもとする．このとき

$$B_\Omega(z) = \varphi(z)\rho(z)^{-n-1} + \psi(z)\log\rho(z),$$

$$S_\Omega(z) = \varphi'(z)\rho(z)^{-n} + \psi'(z)\log\rho(z),$$

ここで $\varphi, \psi, \varphi', \psi' \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (境界までこめて C^∞) であり，φ および φ' は境界では正値である．球の場合には対数項が現れない．しかし球を変形して核関数の変分を計算すると対数項が実際に現れることがわかる．

Ramadanov 予想 I [R]. ベルグマン核の対数項の係数 ψ が消えるのは領域は球と双正則同値である場合に限る．

この予想には簡単な反例がある．まずベルグマン核は局所化可能であることに注意する．すなわち二つの強擬凸領域 Ω, Ω が共通の境界点 $p \in \partial\Omega \cap \partial\Omega'$ の近傍で一致すれば $B_\Omega(z) - B_{\Omega'}(z)$ は p の近傍での C^∞ 関数に拡張される．とくに対数項の係数のテーラー展開は一致する．次にベルグマン核は双正則不変性をもつことに注意する．これは (n,n)-形式として定義から明らかである．従って，境界が球面と局所双正則同値になるような領域（この場合 $\partial\Omega$ は sherical であるという）では対数項は消えることがわかる．また Burns–Shnider により境界が sperical であるが球と双正則同値でない領域の例が与えられている:

$$\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 | \sin\log|z| + |w|^2 < 0,\ e^{-\pi} < |z| < 1\}$$

これが Ramadanov 予想の本質的でない反例である．そこで予想を修正する．

Ramadanov 予想 II. ベルグマン核の対数項の係数 ψ が消えるのは境界が sperical である場合に限る．

これが現在 Ramadanov 予想とよばれるものである．$n = 2$ の場合は Graham (と D. Burns による未発表の計算) により肯定的に解決された．高次元の場合，複素多様体の領域を考えると反例があることが Englis–Zhang によって示された．これについては次章で説明する；この例は $\mathbb{C}^n$ の領域ではない（さらにはスタインでない）ので予想 II の反例とは言えない．この点を強調して予想を拡張しておく．

Ramadanov 予想 III. スタイン多様体の中の強擬凸領域のベルグマン核の対数項の係数 ψ が消えるのは境界が sperical である場合に限る.

セゲー核についても類似の予想を述べることができる.

予想 IIS. $(\partial\Omega, d\sigma)$ のセゲー核の対数項の係数 ψ' が消えるのは $\partial\Omega$ が sperical である場合に限る.

ψ' は $d\sigma$ の選び方によるので, $d\sigma$ についての条件も述べるべきである. Fefferman [F] により導入された不変面素が候補である. これは $n > 2$ のときには Levi 計量が pseudo-Einstein であることと同値であることが知られている.

予想 IIIS. $(\partial\Omega, d\sigma)$ のセゲー核の対数項の係数 ψ' が消えるのは $\partial\Omega$ が sperical であり, $d\sigma$ が不変面素である場合に限る.

$n = 2$ かつ $\partial\Omega$ が transversal symmetry をもつ場合にはこの予想が正しいことが [H1] で示されている. 非有界領域では $n = 2$ でも反例がある ([H1] 参照). 一方 $n \geq 3$ の場合には Englis–Zhang によりスタインではない領域で反例が与えられている.

3 Ramadanov 予想の反例

Englis–Zhang [EZ] は対称空間を用いて Ramadanov 予想の反例を構成している. ここでは Riemann–Roch の定理を用いればより一般的に例を構成することができることを説明する.

$\pi\colon L \to X$ を $n-1$ 次元コンパクト複素多様体 X 上の正の複素直線束とする. これは L の双対を (L^*, h) とするとき (h は L^* のエルミート計量), 領域

$$\Omega = \{v \in L^* : |v|_h < 1\}$$

が強擬凸であることと同値である. Ω の定義関数として $\rho(v) = -\log|v|_h$ を選ぶことができる. $\partial\Omega$ の接触形式を $\theta = -i(\partial - \overline{\partial})\rho$ で定義し, 面素を $\theta \wedge d\theta^{n-1}$ で定める. $S_\Omega(v)$ をこの面素に関するセゲー核とする. ρ および $S_\Omega(v)$ が S^1-作用 (ファイバー上の回転) に関して不変であることに注意すれば Fefferman の漸近展開は

$$S_\Omega(v) \sim \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\rho^{j-n} + \sum_{j=n}^{\infty} a_j(x)\rho^j \log\rho \qquad \rho \to +0$$

のように書くことができる. ここで $x = \pi(v)$ であり $a_j(x)$ は X 上の C^∞ 関数である. 係数 a_j を計算するために, L の m 回のテンソル積 mL を考える. mL の正則断面のなす空間 $H^0(X, mL)$ には L の計量と曲率 $d\theta$ の定めるケーラー形式 ω を用いて内積を定義することができる. その正規直交基底 $\{f_j\}_{j=1}^{d_m}$(ただし $d_m = \dim H^0(X, mL)$) のノルムの和により mL のベルグマン核

$$B_m(x) = \sum_{j=1}^{d_m} |f_j(x)|^2$$

を定義する．B_m はセゲー核 S_Ω のフーリエ級数として書くこともできるため，鞍点法により $B_m(x)$ の $m \to \infty$ での漸近展開

$$B_m(x) \sim m^n \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) m^{-j}$$

が得られる ([Z])．b_j は a_j の定数倍である．b_j はケーラー多様体 (X, ω) の局所不変量であり，曲率テンソル R の共変微分の不変多項式として与えられる．その具体的な計算は大変であるが，積分だけなら簡単に計算することができる．実際 $\int_X B_m(x)\omega^n = d_m$ であり，十分大きな m に対しては d_m は

$$d_m = c \int_X \det\left(\frac{R}{1-e^R}\right) \wedge e^{m\omega}$$

によって与えられる m の多項式 (ヒルベルト多項式) である．とくに

$$\int_X a_j \omega^n = 0, \quad j \geq n,$$

が成り立つ．

(X, ω) が等質であり，自己同型の L^* へのリフトが $\partial\Omega$ 上に推移的に作用している場合を考える．セゲー核と定義関数 ρ は自己同型によって保たれるため，a_j は $\partial\Omega$ 上で定数になる．従って積分の条件から

$$a_j = 0, \qquad j \geq n,$$

すなわち $S_\Omega(v)$ は対数項を持たないことがわかる．Englis–Zhang は X がコンパクト・エルミート対称空間である場合に，表現論を用いて a_j を計算している．

コンパクト・エルミート対称空間の最も簡単な例はグラスマン多様体

$$X = U(l)/U(k) \times U(l-k), \qquad 1 \leq k \leq l-k,$$

である．この場合 L としてユニバーサル束をとればすべての正の等質直線束は L の正ベキで与えれる．また L^* の中の柱状領域を Ω とする．(L^* のベキを考えても $\partial\Omega$ の局所的な CR 構造は変化しない．) $k=1$ のときは Ω は 0 断面を一点に潰せば球と双正則同値である．とくに $\partial\Omega$ は spherical である．ところが $k>1$ のときには $\partial\Omega$ が spherical でないことが Burns–Shnider による spherical CR 多様体の分類定理と $\partial\Omega$ のコホモロジーの計算の比較で示すことができる．よってセゲー核に対する Ramadanov 予想のスタインでない反例が与えられたことになる．(これは面白い CR 多様体の例なので Chern–Moser 不変量などを具体的に計算しておくのも重要であると思う.)

上述の議論をベルグマン核の場合に翻訳するのは容易である．Ω 上の体積要素として $(i\partial\overline{\partial}\rho)^n$ を用いれば Ω のベルグマン核の漸近展開

$$B_\Omega(v,v) \sim \sum_{j=0}^{n} a'_j(x)\rho^{j-n-1} + \sum_{j=n+1}^{\infty} a'_j(x)\rho^j \log\rho$$

の係数 a'_j はセゲー核の係数 a_j の定数倍である．しかしこれは複素構造のみから定まる (n,n)-形式としてのベルグマン核とは異なる．

(n,n)-形式のベルグマン核の展開を b_j を用いて表す方法を考える．$L^* \to X$ の局所正則断面 e_0 をとり，$\phi(x) = |e_0(x)|_h$ とおけばケーラー形式は $\omega = -i\partial\overline{\partial}\phi(x) = ig_{\alpha\overline{\beta}}dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$ で与えられる．X の局所座標系 $(z^1, \ldots, z^{n-1})$ を固定し

$$\omega_0 = i\sum_{j=1}^{n-1} dz^j \wedge d\overline{z}^j$$

とおく．L^* のファイバー座標 z^0 を $v = \exp(z^n)e_0$ により定め L^* 上のケーラー形式を

$$\widetilde{\omega}_0 = \omega_0 + idz^n \wedge d\overline{z}^n$$

で定義する．このとき

$$\rho = z^0 + \overline{z}^0 - \log\phi$$

が成り立つので $\partial\Omega = \{\rho = 0\}$ 上では

$$d\rho \wedge \theta \wedge (d\theta)^{n-1} = c\,(i\partial\overline{\partial}\rho)^n.$$

よって $\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ に関する $\partial\Omega$ 上での積分はデルタ関数を用いて定義されるカレント

$$\delta(\rho)(i\partial\overline{\partial}\rho)^n$$

とのペアリングで表される．一方 Ω 上の $\widetilde{\omega}_0^n$ に関する積分はヘビサイド関数を $Y(\rho)$ とおくと $Y(\rho)\widetilde{\omega}^n$ とのペアリングで表される．このカレントを z^0 で微分すると

$$\partial_{z^0}Y(\rho)\widetilde{\omega}_0^n = \delta(\rho)\widetilde{\omega}_0^n$$

となり体積要素のスケーリング $(i\partial\overline{\partial}\rho)^n = \det(g_{\alpha\overline{\beta}})\widetilde{\omega}_0^n$ のずれが現れるため，セゲー核とベルグマン核の微分関係式を書くことは困難である（擬微分作用素なら書けるのだかそれでは新しい対数項が出てくる可能性がある）．ところが ω がアインシュタインであれば $\partial\overline{\partial}\log\det(g_{\alpha\overline{\beta}})$ は ω の定数倍である．よってポテンシャルのレベルではある定数 c に対して $\phi = c\det(g_{\alpha\overline{\beta}})$ が成り立つ．$\phi = e^{z^0+\overline{z}^0} + O(\rho)$ より

$$\delta(\rho)\widetilde{\omega}_0^n = e^{-z^0-\overline{z}^0}\delta(\rho)(i\partial\overline{\partial}\rho)^n$$

と表すことができる．$e^{-z^0-\overline{z}^0}$ は多重調和なのでスケーリングに関するセゲー核の変換則がある：S を $\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ に関するセゲー核とすると $e^{-z^0-\overline{z}^0}\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ に関するセゲー核 $\widetilde{S}$ は $e^{z^0+\overline{z}^0}S$ で与えれる．よってベルグマン核は

$$B = -\partial_{z^0}e^{z^0+\overline{z}^0}S$$

で与えられる．とくに S が対数項をもたなければ B もそうであることがわかる．上述のコンパクト・エルミート対称空間はアインシュタインなのでこの議論が適用できる．

4　なぜ２次元が特殊なのか？

２次元領域のときに Ramadanov 予想が正しかったのは実３次元の CR 幾何の特殊性による．その事情を説明する．より詳しいことは [H2] を参照．

Fefferman のアイディアに従ってベルグマン核を複素 Monge–Ampère 方程式の解をもちいて記述することを考える．Ω の定義関数で Ω 上で

$$(-1)^n \det \begin{pmatrix} u & \partial u \\ \overline{\partial} u & \partial\overline{\partial} u \end{pmatrix} = 1$$

を満たすものを考える．u が一意的に存在することは Cheng–Yau により示されている；よって Ω の完備アインシュタイン・ケーラー計量が $-i\partial\overline{\partial}\log u$ で与えられる．

単位球においては $u = 1 - |z|^2$ であり，ベルグマン核と u のベキは一致する：

$$B(z) = c_n u(z)^{-n-1}.$$

Ramadanov [R] はこの等式が成り立つ強擬凸領域は球と双正則同値である場合に限ることを示した．その議論には漸近展開も対数項も現れない．一般の領域でのずれ $B(z) - c_n u(z)^{-n-1}$ を詳しく調べるにはまず u の境界での展開

$$u \sim \eta_0 \rho + \rho \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j (\rho^{n+1} \log \rho)^j, \quad \eta_j \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

が必要である．この解は大域的に決定されるが

$$u^{-n-1} = \varphi_0 \rho^{-n-1} + \varphi_1 \log \rho + O(\rho^{n+1} \log \rho)$$

の特異性 (mod $C^\infty(\overline{\Omega})$) は局所化可能である．放物型不変式論を用いると

$$B(z) - c_n u(z)^{-n-1} = \begin{cases} O(\rho^{-n+1}) & n \geq 3 \\ O(\rho \log \rho) & n = 2 \end{cases}$$

までは簡単に示すことができる．このずれを記述するには境界の不変量を導入する必要がある；ここでは Moser による標準型の手法を使う．$\mathbb{C}^n$ 内の強擬凸超曲面 M の各点 p で $p = 0$ となる座標系をうまく選べば M は

$$z^0 + \overline{z}^n - |z'|^2 + h(z', \overline{z}', \mathrm{Im} z^n) = 0, \quad h = O(|z|^3),$$

ここで $z' = (z^1, \ldots, z^{n-1})$, という形であらわすことができる．$h$ を出来る限り小さくすること考える．$n \geq 3$ のときには $h = O(|z'|^4)$ が最良であり

$$h = \sum_{i,j,k,l=1}^{n-1} A_{ij\overline{k}\overline{l}} z^i z^j \overline{z}^k \overline{z}^l + O(|z|^5)$$

とおくとき $A_{2,2} = (A_{ij\overline{kl}})$ はトレースが消えるように正規化可能である．$A_{2,2}$ が各点で消えれば M は spherical になることが知られている．一方 $n = 2$ の場合 $h = O(|z'|^6)$ が最良であり

$$h = 2\mathrm{Re}(A_{2,4}(z^1)^2(\overline{z^1})^4) + O(|z|^7)$$

の形に正規化が可能である．さらに $A_{2,4}$ が各点で消えれば M は spherical になる．これらの不変量を用いると

$$B(z) - c_n u(z)^{-n-1} = \begin{cases} c_n' \|A_{2,2}\|^2 \rho^{-n+1} + O(\rho^{-n+2}) & n \geq 3 \\ c_2' |A_{2,4}|^2 \rho \log \rho + O(\rho^2 \log \rho) & n = 2 \end{cases}$$

が成り立つ．ここで c_n' は0でない定数である．右辺の係数が消えると境界は spherical になる．$n = 2$ のときはずれが対数項に現れるため Ramadanov 予想が導かれる（これは自明でない議論である；詳細は [G] 参照）．$n \geq 3$ ではずれが早く現れるため対数項についての情報は得られない．このずれの計算を続ければ高次元でも対数項の曲率による表示が得られる．しかし Englis–Zhang の反例が示すようにこれらの不変量が消えても spherical になることは示せない．

$\mathbb{C}^n$ の領域に対する Ramadanov 予想はまだ否定されたわけではない；局所的な解析だけでは解決できない，より難しい問題である．多様体の領域としては予想の修正が必要である．

予想．ベルグマン核の対数項が消えるのは2章で与えた例に限る．

この予想を信じるより反例を探す方が妥当であると思う．

参考文献

[EZ] M. Englis and G. Zhang: Ramadanov conjecture and line bundles over compact Hermitian symmetric spaces, Math. Z., to appear.
available from `http://www.math.cas.cz/~englis/papers.html`

[R] I.P. Ramadanov: A characterization of the balls in $\mathbb{C}^n$ by means of the Bergman kernel. C. R. Acad. Bulgare Sci. 34 (1981), 927–929.

[G] R. Graham, Scalar boundary invariants and the Bergman kernel, Lecture notes in mathematics (C. Berenstein, eds.), vol. 1276, Springer-Verlag, 1987, pp. 108–135.

[BS] D. Burns and S. Shnider: Spherical hypersurfaces in complex manifolds, Invent. Math. 33 (1976), 223–246.

[H1] K. Hirachi: Scalar pseudo-Hermitian invariants and the Szegö kernel on three-dimensional CR manifolds, in Complex Geometry (Osaka 1990), Lect. Notes Pure Appl. Math. 143, pp. 67–76, Dekker, New York, 1993.

[H2] 平地健吾: 強擬凸領域におけるベルグマン核の不変式論, 数学 52 (4) pp.360–375, 2000, 日本数学会

[Z] S. Zelditch: Szegö kernels and a theorem of Tian. Internat. Math. Res. Notices 6 (1998), 317?331.

Date: March 6, 2010